

KAJIAN TENTANG SKEMA BEDA HINGGA KOMPAK ORDE-4

Eko Prasetya Budiana¹

Abstract : Fourth order compact finite-difference scheme is based on low-storage Runge-Kutta schemes for temporal discretization and fourth order compact finite-difference schemes for spatial discretization. Fourth order compact schemes was devised with nearly the resolution quality of spectral methods, but retaining the flexibility of finite-difference methods

Keywords : Finite difference, fourth order compact

PENDAHULUAN

Suatu metode numerik orde tinggi telah dikembangkan untuk penyelesaian persamaan Navier-Stokes aliran tak mampat 2-D dan 3-D. Metode ini didasarkan pada skema Runge-Kutta untuk diskritasi waktu (*temporal discretization*), dan skema beda-hingga kompak (*compact finite difference scheme*) untuk diskritasi ruang (*spatial discretization*). Metode orde-tinggi yang akurat digunakan untuk mengurangi galat dispersi dan galat disipasi.

Lele[1] telah menganalisa bahwa skema kompak memiliki resolusi yang lebih baik dari skema eksplisit yang umum untuk orde ketelitian dan stencil komputasi yang sama .

Diskritasi waktu (*temporal discretization*)

Diskritasi waktu untuk persamaan Navier-Stokes adalah menggunakan skema Runge-Kutta sebagai berikut :

$$\Phi_i^{M+1} = \Phi_i^M + b\Delta t H_i^M$$
$$H_i^M = -u_j \partial x_j u_i^M + \frac{1}{\text{Re}_L} \partial^2 x x_j u_i^M + a^M H_i^{M-1}$$

Diskritasi ruang (*spatial discretization*)

Metode beda-hingga standar orde-dua untuk turunan pertama memiliki dispersion error yang besar, sedangkan metoda beda-hingga kompak memiliki kelebihan yaitu akurasi tinggi, fleksibel dan pengoperasiannya lebih mudah.

Diskritasi waktu (*temporal discretization*)

Diskritasi waktu untuk persamaan Navier-Stokes adalah menggunakan skema Runge-Kutta sebagai berikut :

$$\Phi_i^{M+1} = \Phi_i^M + b\Delta t H_i^M$$
$$H_i^M = -u_j \partial x_j u_i^M + \frac{1}{\text{Re}_L} \partial^2 x x_j u_i^M + a^M H_i^{M-1}$$

Diskritasi ruang (*spatial discretization*)

¹ Staff Pengajar Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik UINS

Metode beda-hingga standar orde-dua untuk turunan pertama memiliki dispersion error yang besar, sedangkan metoda beda-hingga kompak memiliki kelebihan yaitu akurasi tinggi, fleksibel dan pengoperasiannya lebih mudah.

dimana : $\Delta x = L_x / N_x$
 N_x = jumlah grid point
 Φ'_i = turunan pertama dari variabel Φ_i terhadap x
 α, a, b = koefisien skema kompak

Turunan terhadap y dan z dapat dilakukan dengan cara yang sama. Untuk skema orde-empat maka ; $\alpha = 1/4$, $a = 3/2$, dan $b=0$. Untuk skema orde-enam maka; $\alpha = 1/4$, $a = 14/9$, dan $b=1/9$.

Perbandingan pendekatan skema beda-hingga eksplisit dan skema kompak dari turunan pertama ditunjukkan dalam tabel 1. Di sini terlihat bahwa skema kompak memiliki stencil yang lebih sedikit, koefisien kesalahan pemenggalan (*truncation error*) berkurang menjadi $1/4$ untuk orde-empat dan $1/9$ untuk orde-enam dari koefisien beda tengah eksplisit untuk orde yang sama.

Tabel 1. Perbandingan jumlah stencil skema beda-hingga eksplisit dan skema kompak dari turunan pertama.

Skema	Kesalahan pemenggalan	Jumlah stencil
Beda tengah orde-4(skema beda hingga)	$(-4/5!)(\Delta x)^4 \Phi^{(5)}$	5
Beda tengah orde-4(skema kompak)	$(-1/5!)(\Delta x)^4 \Phi^{(5)}$	3
Beda tengah orde-6(skema beda hingga)	$(-36/7!)(\Delta x)^4 \Phi^{(7)}$	7
Beda tengah orde-4(skema kompak)	$(-4/7!)(\Delta x)^4 \Phi^{(7)}$	5

Menurut Hu dkk[2] resolusi dari pendekatan numerik turunan pertama dapat dianalisa dengan mentransformasi persamaan konveksi 1-D sebagai berikut :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l \Phi_{j+l}$$

Dalam *mode* Fourier $\Phi = \tilde{\Phi}(t)e^{ikx}$ maka :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} e^{ikx}$$

$$\Phi_{j+l} = \tilde{\Phi} e^{ik(x+l\Delta x)}$$

Sehingga persamaan konveksi 1-D menjadi :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} e^{ikx} + \frac{c}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l \tilde{\Phi} e^{ik(x+l\Delta x)} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{c}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l \tilde{\Phi} e^{ikl\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + ick * \tilde{\Phi} = 0$$

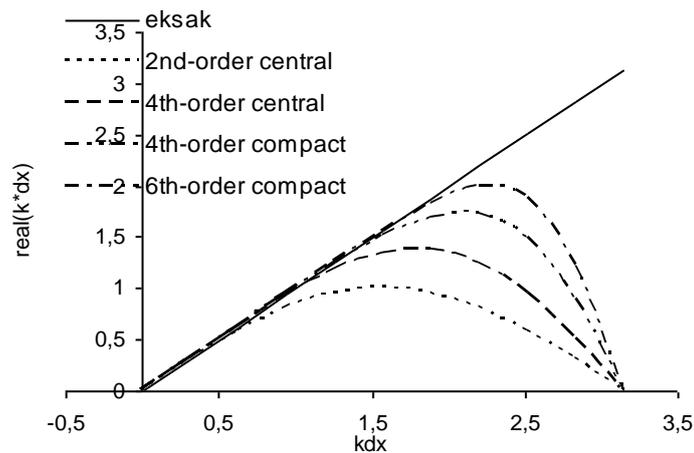
dimana :
$$k^* = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l e^{ikl\Delta x}$$

Numerical wavenumber k^* adalah bilangan kompleks, sedangkan exact wavenumber k adalah riil. Untuk pendekatan numerik terhadap penyelesaian eksak maka dua kondisi di bawah ini harus dipenuhi, yaitu :

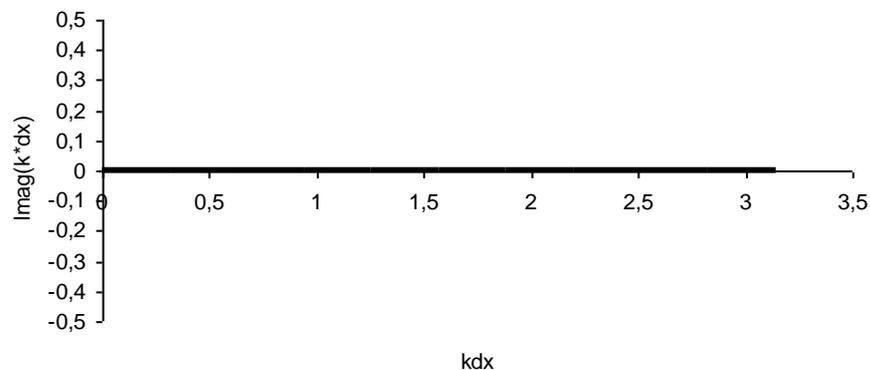
$$\begin{aligned} \text{Real}(k^*) &= k \\ \text{Imag}(k^*) &= 0 \end{aligned}$$

Deviasi dari $\text{real}(k^*)$ terhadap k menunjukkan galat dispersi yang disebabkan oleh turunan genap dan deviasi dari $\text{imag}(k^*)$ menunjukkan galat disipasi yang disebabkan oleh turunan ganjil.

(a)



(b)



Gambar2. (a) Galat dispersi dan (b) galat disipasi untuk pendekatan numerik turunan pertama

Kondisi batas diselesaikan dengan skema kompak orde-tiga dengan persamaan sebagai berikut :

$$\Phi_1' + \alpha_{bs} \Phi_2' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^3 a_{bsi} \Phi_i$$

$\alpha_{bs} = 2$ dan $a_{bs1} = -5/2$, $a_{bs2} = 2$, $a_{bs3} = 1/2$ adalah koefisien orde-tiga dari skema batas (*boundary scheme*) pada $i=1$. Persamaan yang sama juga digunakan untuk skema batas pada $i=N$.

Untuk skema orde-enam, kondisi batas diselesaikan dengan skema eksplisit beda-hingga orde-lima untuk titik $i=1$ dan $i=N$. Persamaan kondisi batas adalah sebagai berikut :

$$\Phi_1' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 a_{bsi} \Phi_i$$

dimana :

$$\begin{aligned} a_{bs1} &= -296/105 & a_{bs5} &= -215/12 \\ a_{bs2} &= 415/48 & a_{bs6} &= 791/80 \\ a_{bs3} &= -125/8 & a_{bs7} &= -25/8 \\ a_{bs4} &= 985/48 & a_{bs8} &= 145/336 \end{aligned}$$

Untuk kondisi batas pada $i=2$ dan $i=N-1$ juga digunakan skema eksplisit orde-lima sebagai berikut :

$$\Phi_1' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 a_{nbi} \Phi_i$$

dimana :

$$\begin{aligned} a_{nb1} &= -3/16 & a_{nb5} &= 115/144 \\ a_{nb2} &= -211/180 & a_{nb6} &= -1/3 \\ a_{nb3} &= 109/48 & a_{nb7} &= 23/40 \\ a_{nb4} &= -35/24 & a_{nb8} &= -1/72 \end{aligned}$$

Turunan kedua

Persamaan skema kompak untuk turunan kedua dalah sebagai berikut :

$$\alpha \Phi_{i-1}'' + \Phi_i'' + \alpha \Phi_{i+1}'' = \frac{a}{(\Delta x)^2} (\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}) + \frac{b}{4(\Delta x)^2} (\Phi_{i+2} - 2\Phi_i + \Phi_{i-2})$$

dimana :

$$\begin{aligned} \Phi_i'' &= \text{turunan kedua dari variabel } \Phi_i \text{ terhadap } x \\ \alpha, a, b &= \text{koefisien skema kompak turunan kedua} \end{aligned}$$

Untuk orde-empat, $\alpha=1/10$, $a=6/5$, dan $b=0$

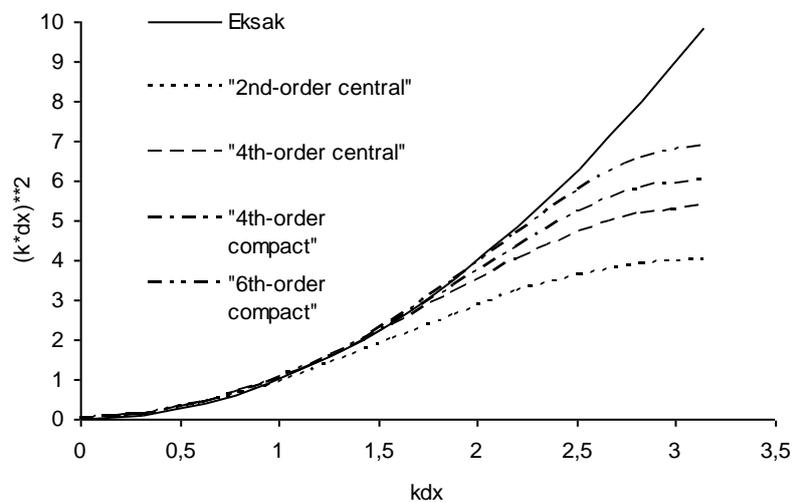
Untuk orde-enam, $\alpha=2/11$, $a=12/11$, dan $b=3/11$

Perbandingan antara skema beda-hingga eksplisit dan skema beda hingga kompak ditunjukkan dalam tabel 2. Di sini terlihat bahwa skema kompak memiliki stensil lebih sedikit, koefisien kesalahan pemenggalan (*truncation error*) berkurang menjadi $1/2$ untuk orde-empat dan $1/4$ untuk orde-enam dari koefisien *explicit central difference* untuk orde yang sama.

Tabel 2. Perbandingan pendekatan beda-hingga eksplisit dan kompak implisit untuk turunan kedua.

Skema	Kesalahan pemenggalan	Jumlah Stensil
Beda tengah orde-4(skema beda hingga)	$(-8/6!)(\Delta x)^4 \Phi^{(6)}$	5
Beda tengah orde-4(skema kompak)	$(-3.6/6!)(\Delta x)^4 \Phi^{(6)}$	3
Beda tengah orde-6(skema beda hingga)	$(-72/8!)(\Delta x)^6 \Phi^{(8)}$	7
Beda tengah orde-4(skema kompak)	$(-16.7/8!)(\Delta x)^6 \Phi^{(8)}$	5

Analisa resolusi untuk turunan kedua dari pendekatan numerik skema kompak dilakukan dengan cara yang sama dengan analisa turunan pertama.



Gambar 3. Galat dispersi pendekatan numerik turunan kedua

Galat dispersi dari berbagai skema beda-hingga tampak pada gambar 3. Dapat diketahui bahwa nilai *numerical wavenumber* untuk skema kompak lebih mendekati nilai *exact wavenumber*.

Kondisi batas pada $i=1$ dan $i=N$ diselesaikan dengan skema kompak orde-tiga sebagai berikut:

$$\Phi_i'' + \alpha_{bs} \Phi_2'' = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^4 a_{bsi} \Phi_i$$

dimana, $\alpha_{bs} = 11$ dan $a_{bs1} = 13$, $a_{bs2} = -27$, $a_{bs3} = 15$ dan $a_{bs4} = -1$ adalah koefisien skema kompak orde-tiga.

Contoh Kasus

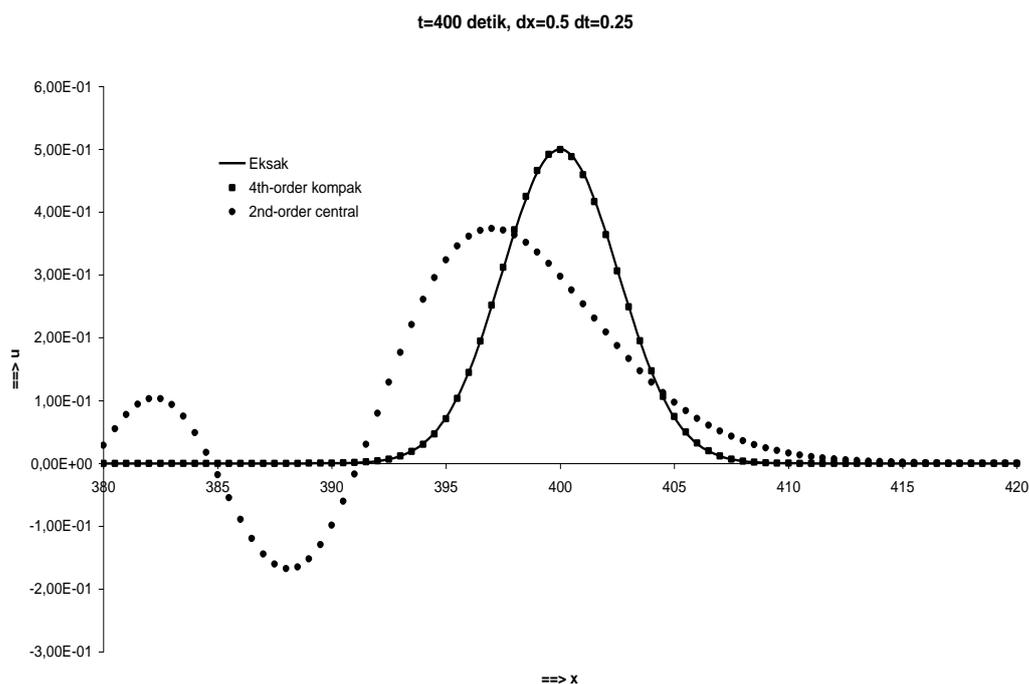
Persamaan konveksi 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x,0) = 0.5 \exp \left[- \left(\frac{x}{3} \right)^2 \ln(2) \right]; -20 \leq x \leq 450; \Delta x = 0.5, \Delta t = 0.25, c = 1$$

Penyelesaian persamaan konveksi 1D dilakukan dengan pendekatan beda hingga dan pendekatan skema kompak orde-4. Untuk pendekatan beda hingga digunakan pendekatan beda maju untuk turunan waktu dan pendekatan beda tengah untuk turunan ruang. Untuk pendekatan skema kompak beda hingga digunakan skema Runge-Kutta orde-4 untuk turunan waktu dan skema kompak orde-4 untuk turunan ruang. Hasil penyelesaian numerik dibandingkan dengan hasil penyelesaian eksak seperti ditunjukkan pada Gambar 4.

Gambar 4. menunjukkan grafik penyelesaian numerik saat $t=400$ pada $x=400$. Grafik penyelesaian dengan skema kompak orde-4 menempel dengan grafik penyelesaian eksak. Grafik penyelesaian dengan pendekatan beda hingga terdapat osilasi numerik dan jauh lebih rendah dari penyelesaian eksak.



Gambar 4. Penyelesaian persamaan konveksi 1D pada t=400 detik

KESIMPULAN

1. Skema kompak memiliki resolusi yang lebih baik dari skema beda hingga biasa dengan stensil komputasi yang sama .
2. Untuk penyelesaian persamaan konveksi 1D skema kompak memiliki akurasi yang lebih baik dibandingkan pendekatan beda hingga.

DAFTAR PUSTAKA

- Hirsch, C. 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. I & II, John Wiley & Sons, Chichester, England.
- Hu, F.Q., Hussaini, M.Y. and Manthey, J., 1996, *Low-Dissipation and Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics*, ICASE Report 94-102, and *Journal of Computational Physics*. Vol 124.1, pp.177-191, 1996
- Wilson, R.V., Demuren, A.O. and Carpenter M., 1998, *Higher-Order Compact Schemes for Numerical simulation of Incompressible Flows*, ICASE Report No. 98-13.