

DESAIN OPTIMASI FUNGSI TAK LINIER MENGGUNAKAN METODE PENYELIDIKAN FIBONACCI

Yemi Kuswardi¹
Nurul Muhayat²

Abstract: optimum design is an action to design the best product based on the problem. Theoretically, the problem of optimum design can be shown into mathematics' model. It has linear or non linear program, it's depends on the effect of variables. The finishing of non linear program can be done through iteration process numerically. One of the method can be used to finish that problem is Fibonacci Investigating method. This method can be used by the requirements of the objective function from non liner program that is called unimodal function. The usage of this method is preceded with establishing interval that contain optimum point by using the characteristic of unimodal function. Then, search the total finding needed to reach the required detail. The next step is identifying the two newest points found in the interval which contains the optimum point and comparing the functional value of both point and that of the interval limit. If the objective function is maximizing, the point with the smallest function is then being reduced. Conversely, if the objective function is minimizing, the point which is reduced is one with the greatest functional value. The result of that is new interval. That procedure is repeated until the total finding equal to one. If the total finding equal to one so the point is located in the middle of the new finding interval which is the optimum point of the objective function.

Key words: Optimum design, objective function, Fibonacci Investigating method

LATAR BELAKANG

Desain optimasi adalah suatu tindakan untuk merancang hasil terbaik didasarkan pada kendala-kendala yang ada. Masalah optimisasi secara teoritis dapat dimodelkan dalam suatu model matematis. Model matematis yang diperoleh dapat berbentuk program linier atau program tak linier, tergantung variabel-variabel yang mempengaruhinya

Metode-metode di dalam program tak linier penyelesaiannya dapat secara analitik atau numerik. Penyelesaian program tak linier secara analitik perhitungannya didasarkan pada teknik hitung diferensial dan penyelesaian program tak linier secara numerik dilakukan melalui proses iterasi.

Metode numerik digunakan untuk menghitung nilai-nilai pendekatan bagi lokasi dari (beberapa) optimum lokal hingga suatu toleransi tertentu. Ada beberapa cara untuk menentukan letak dan nilai optimum dari suatu fungsi, diantaranya adalah dengan metode penyelidikan sekuensial, metode penyelidikan selang tiga titik, metode penyelidikan Fibonacci, dan metode penyelidikan jalan tengah.

Berdasarkan latar belakang tersebut berikut ini penulis mencoba menggunakan metode penyelidikan fibonacci untuk menentukan letak dan nilai optimum suatu fungsi tak linier dengan satu variabel.

TINJAUAN TEORI

Pengertian Program Tak Linier

Program matematis menurut Bronson (1993: 1) dapat berbentuk sebagai berikut: Mengoptimalkan (maksimumkan/minimumkan)

¹ Staff Pengajar Jurusan PMIPA, FKIP- Universitas Sebelas Maret Surakarta

² Staff Pengajar Jurusan Teknik Mesin, FT-Universitas Sebelas Maret Surakarta

$$Z = f(X) \text{ dengan } X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Terhadap kendala:

$$g_i(X) (\leq, =, \geq) b_i \quad (1)$$

dengan $f(x)$ dan $g_i(x)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$ fungsi-fungsi dalam variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan b_1, b_2, \dots, b_m adalah konstanta sembarang.

Program matematis (1) dikatakan program linier jika $f(x)$ dan setiap $g_i(x)$ merupakan fungsi linier. Apabila terdapat minimal satu fungsi berbentuk tak linier maka program matematis (1) dikatakan program tak linier. Program matematis tak terkendala apabila pada program matematis (1) setiap $g_i(x)$ dan b_i bernilai nol.

Maksimum dan Minimum Lokal

Definisi:

Misalkan I daerah asal dari f yang memuat titik c , dikatakan bahwa:

- $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada I jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di I .
- $f(c)$ adalah nilai minimum f pada I jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di I .
- $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada I jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Teorema Titik Kritis

Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c . Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu dari:

- Titik ujung pada I
- Titik stasioner dari f yaitu $f'(c) = 0$
- Titik singular dari f yaitu $f'(c)$ tidak ada

Bukti:

Pandang kasus pertama $f(c)$ adalah nilai maksimum pada I

andaikan c bukan titik ujung ataupun titik singular, akan dibuktikan bahwa c adalah titik stasioner.

Karena $f(c)$ adalah nilai maksimum maka $f(c) \geq f(x), \forall x \in I$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0, \forall x \in I$$

akibatnya:

jika $x < c$ maka $x - c < 0$ sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (a)$$

jika $x > c$ maka $x - c > 0$ sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (b)$$

karena c bukan titik singular maka $f'(c)$ ada.

Akibatnya, pada (a) jika $x \rightarrow c^-$ didapatkan $f'(c) \geq 0$ dan, pada (b) jika $x \rightarrow c^+$ didapatkan $f'(c) \leq 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f'(c) = 0$, berarti c adalah titik singular.

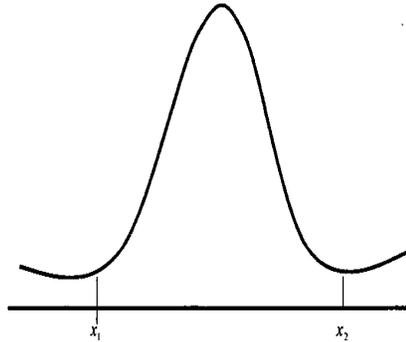
Untuk kasus $f(c)$ adalah nilai minimum dapat dibuktikan secara serupa.

(Purcell, 1999: 177)

Fungsi Unimodal

Fungsi unimodal yaitu suatu fungsi yang hanya mempunyai satu puncak (maksimum) atau satu lembah (minimum). Apabila suatu fungsi bersifat multi modal (berpuncak banyak) pada suatu interval tertentu, maka untuk mengubah fungsi tersebut agar menjadi fungsi yang unimodal dengan cara interval tersebut harus dibagi menjadi

interval-interval yang lebih kecil sehingga pada interval-interval kecil tersebut fungsi bersifat unimodal.



Gambar 1. Contoh fungsi unimodal

METODE PENYELIDIKAN FIBONACCI

Pencarian Fibonacci

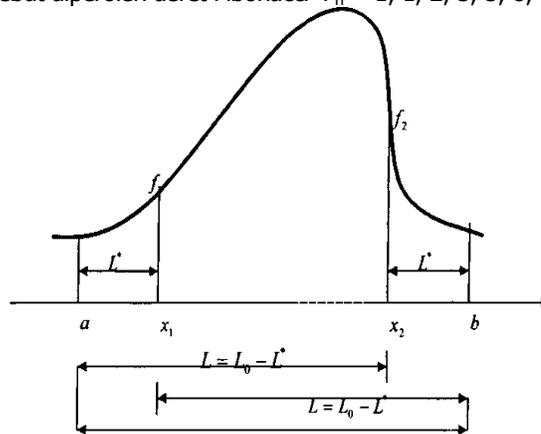
Pencarian Fibonacci dapat dipakai untuk mencari optimum dari sebuah fungsi satu variabel, bahkan untuk fungsi yang tidak kontinu dengan syarat fungsi tersebut harus merupakan suatu fungsi unimodal. Metode ini, mempunyai ciri khas sebagai berikut:

- Interval permulaan dimana terletak titik optimum harus diketahui terlebih dahulu
- Fungsi obyektif yang dioptimalkan harus fungsi unimodal pada interval pencarian.
- Jumlah nilai fungsi obyektif yang harus dievaluasi dalam pencarian atau jumlah subinterval pencarian harus ditentukan sebelumnya.
- Pada teknik Fibonacci ini digunakan sebuah deret yang dinamakan deret Fibonacci (F_n) yang mempunyai ciri sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} F_0 = F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned} \right\}$$

dengan $n = 2, 3, 4, \dots$

Dari ciri tersebut diperoleh deret Fibonacci $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$



Gambar 2. Prosedur Metode Penyelidikan Fibonacci

Misal interval pencarian mula-mula $L_0 = b - a$ dan terdapat N jumlah pencarian yang harus dilaksanakan.

Didefinisikan
$$L^* = \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0$$

$$L = L_0 - L^* = L_0 - \frac{F_{N-2}}{F_N} L_0 = \left[1 - \frac{F_{N-2}}{F_N} \right] L_0 = \frac{F_{N-1}}{F_N} L_0$$

kemudian dicari dua titik x_1 dan x_2 yang letaknya masing-masing berjarak L^* dari a dan berjarak L^* dari b . Sehingga diperoleh

$$x_1 = a + L^*$$

$$x_2 = b - L^* = a + L = a + \frac{F_{N-1}}{F_N} L_0$$

Dengan menggunakan sifat fungsi unimodal, maka dapat ditentukan interval mana yang mengandung titik optimum. Pada Gambar 2, karena nilai f di a paling minimum maka a direduksi dari pencarian sehingga interval yang mengandung titik optimum menjadi $[x_1, b]$. Langkah selanjutnya adalah mengulangi prosedur di atas dengan nilai N yang baru yang dihitung sebagai $N = N - 1$. Demikian prosedur ini diulang sampai dengan $N = 1$.

Penyelidikan Fibonacci

Barisan Fibonacci $F_N = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$ adalah barisan yang tiap-tiap bilangan dalam barisan ini diperoleh dengan menambahkan dua bilangan sebelumnya, dengan perkecualian bagi dua bilangan yang pertama, F_0 dan F_1 keduanya diberi harga 1. Penyelidikan Fibonacci diawali dengan menentukan bilangan Fibonacci terkecil yang memenuhi $F_N \varepsilon \geq b - a$, dimana ε adalah batas toleransi kesalahan yang diperbolehkan hingga diperoleh x^* (letak nilai fungsi mencapai optimum) pada $[a, b]$.

Misalkan $\varepsilon' = \frac{b - a}{F_N}$, maka dua buah titik awal dalam penyelidikan ini terletak sejauh

$F_{N-1} \varepsilon'$ dari titik ujung a dan b dengan F_{N-1} adalah bilangan fibonacci yang mendahului F_N . Titik-titik yang berturut-turut dalam penyelidikan ini ditinjau satu per satu dan terletak pada jarak $F_j \varepsilon'$ dengan $j = N-2, N-3, N-4, \dots, 2$ unit dari titik-titik ujung terbaru dari selang yang ditinjau. Dengan prosedur fibonacci dapat diketahui sebelumnya jumlah langkah perhitungan yang diperlukan untuk mencapai suatu ketelitian tertentu.. Pencarian letak dan nilai optimum fungsi tersebut dapat dilakukan dengan algoritma berikut ini.

Input : Fungsi unimodal dengan satu variabel pada interval $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ dengan toleransi kesalahan sebesar ε

Langkah 1 Tentukan jumlah pencarian N dengan rumus $F_N \varepsilon \geq b^{(0)} - a^{(0)}$

Dan cari nilai
$$\varepsilon' = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{F_N}$$

$k = 1$

Langkah 2
$$L^{*(k)} = F_{N-1} \varepsilon'$$

$$x_1^{(k)} = a^{(k-1)} + L^{*(k)}$$

$$x_2^{(k)} = b^{(k-1)} - L^{*(k)}$$

Cari $f(x_1^{(k)})$ dan $f(x_2^{(k)})$

Langkah 3 Untuk masalah memaksimumkan

Jika $x_1^{(k)} < x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = x_1^{(k)}$; $b^{(k)} = b^{(k-1)}$

Jika $x_1^{(k)} < x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = a^{(k-1)}$; $b^{(k)} = x_2^{(k)}$

Jika $x_1^{(k)} > x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = a^{(k-1)}$; $b^{(k)} = x_1^{(k)}$

Jika $x_1^{(k)} > x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = x_2^{(k)}$; $b^{(k)} = b^{(k-1)}$

Untuk masalah meminimumkan

Jika $x_1^{(k)} < x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = a^{(k-1)}$; $b^{(k)} = x_2^{(k)}$

Jika $x_1^{(k)} < x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = x_1^{(k)}$; $b^{(k)} = b^{(k-1)}$

Jika $x_1^{(k)} > x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = x_2^{(k)}$; $b^{(k)} = b^{(k-1)}$

Jika $x_1^{(k)} > x_2^{(k)}$ dan $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$ maka $a^{(k)} = a^{(k-1)}$; $b^{(k)} = x_1^{(k)}$

Langkah 4

Jika $N = N-1 = 1$ Stop

Berarti $x^* = \frac{1}{2}(a^{(k)} + b^{(k)})$ merupakan letak nilai optimum fungsi

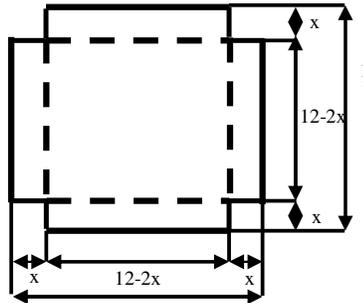
Jika $N = N-1 \neq 1$ maka lanjut ke Langkah 5

Langkah 5

$k = k + 1$ kembali ke Langkah 2

Penerapan Metode Penyelidikan Fibonacci Pada Kasus Produksi

Sebuah perusahaan makanan berusaha mengurangi pengeluaran untuk keperluan kemasan. Kemasan tersebut berbentuk kotak yang terbuat dari karton dengan ukuran ditunjukkan pada Gambar 3. Berapa tinggi kotak tersebut agar volume kemasan menjadi maksimum sehingga perusahaan dapat menghemat bahan untuk kemasan?



Gambar 3. Kerangka kemasan yang berbentuk kotak

Penyelesaian:

Model matematika dari permasalahan di atas adalah :

$$\text{Memaksimumkan } V = x(12 - 2x)(12 - 2x) = 4(36x - 12x^2 + x^3)$$

Terhadap batasan/kendala $0 \leq x \leq 6$

Permasalahan tersebut akan diselesaikan dengan metode penyelidikan Fibonacci dengan toleransi kesalahan sebesar 0.5

$$\text{Input: } V = x(12 - 2x)(12 - 2x) = 4(36x - 12x^2 + x^3)$$

$$[a^{(0)}, b^{(0)}] = [0, 6] \text{ dan } \varepsilon = 0,5$$

$$F_N \varepsilon' \geq 6 \Rightarrow F_N(0.5) \geq 6 \Rightarrow F_N \geq 12 \text{ sehingga } F_N = 13 \Rightarrow N = 6$$

$$\varepsilon' = \frac{6}{13} = 0.46$$

$$N-1=5; k = 1; \quad L^{*(1)} = F_5(0.46) = 8(0.46) = 3.68$$

$$x_1^{(1)} = 0 + 3.68 = 3.68 \Rightarrow V(x_1^{(1)}) = 79.22893$$

$$x_2^{(1)} = 6 - 3.68 = 2.32 \Rightarrow V(x_2^{(1)}) = 125.6735$$

$$\text{karena } x_1^{(1)} > x_2^{(1)}; V(x_1^{(1)}) < V(x_2^{(1)}) \Rightarrow a^{(1)} = 0; b^{(1)} = 3.68$$

$$N-1=4; k = 2; L^{*(2)} = F_4(0.46) = 5(0.46) = 2.3$$

$$x_1^{(2)} = 0 + 2.3 = 2.3 \Rightarrow V(x_1^{(2)}) = 125.948$$

$$x_2^{(2)} = 3.68 - 2.3 = 1.38 \Rightarrow V(x_2^{(2)}) = 117.8211$$

$$\text{karena } x_1^{(2)} > x_2^{(2)}; V(x_1^{(2)}) < V(x_2^{(2)}) \Rightarrow a^{(2)} = 1.38; b^{(2)} = 3.68$$

$$N-1=3; k = 3; L^{*(3)} = F_3(0.46) = 3(0.46) = 1.38$$

$$x_1^{(3)} = 1.38 + 1.38 = 2.76 \Rightarrow V(x_1^{(3)}) = 115.8935$$

$$x_2^{(3)} = 3.68 - 1.38 = 2.3 \Rightarrow V(x_2^{(3)}) = 125.948$$

$$\text{karena } x_1^{(3)} > x_2^{(3)}; V(x_1^{(3)}) < V(x_2^{(3)}) \Rightarrow a^{(3)} = 1.38; b^{(3)} = 2.76$$

$$N-1=2; k = 4; L^{*(4)} = F_2(0.46) = 2(0.46) = 0.92$$

$$x_1^{(4)} = 1.38 + 0.92 = 2.3 \Rightarrow V(x_1^{(4)}) = 125.948$$

$$x_2^{(4)} = 2.76 - 0.92 = 1.84 \Rightarrow V(x_2^{(4)}) = 127.3692$$

$$\text{karena } x_1^{(4)} > x_2^{(4)}; V(x_1^{(4)}) < V(x_2^{(4)}) \Rightarrow a^{(4)} = 1.38; b^{(4)} = 2.3$$

N-1=1 Stop maka $x^* = \frac{1}{2}(1.38 + 2.3) = 1.84$ merupakan letak nilai optimum dari

permasalahan Memaksimumkan $V = x(12 - 2x)(12 - 2x) = 4(36x - 12x^2 + x^3)$

Terhadap batasan/kendala $0 \leq x \leq 6$ dengan toleransi kesalahan sebesar 0.5. Nilai optimum yang dicapai adalah $V_{\max} = 127.3692$

KESIMPULAN

Metode penyelidikan fibonacci dapat digunakan untuk mencari letak dan nilai optimum dari suatu fungsi tak linier yang merupakan fungsi unimodal dengan satu variabel baik fungsi yang kontinu ataupun fungsi yang tidak kontinu.

DAFTAR PUSTAKA

- Bronson, Richard. 1993. *Teori dan Soal-soal Operations Research*. Jakarta: Erlangga.
 Edwin. J. Purcell dan Dale Varberg. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitik jilid I*. Jakarta: Erlangga.
 Tom. M. Apostol. *Calculus Volume I. One-Variable Calculus, With an Introduction to Linier Algebra*. New York: John Wiley & Sons