

PENGEMBANGAN PROGRAM PEMBANGKITAN MESH TRIANGULASI ADAPTIF SEBAGAI DOMAIN MASUKAN ANALISIS ELEMEN HINGGA UNTUK PENYELESAIAN PERSOALAN TEKNIK MESIN UMUM

R. Lulus Lambang G. Hidajat¹, Eko Prasetya Budiana¹

¹ Staf Pengajar - Jurusan Teknik Mesin - Fakultas Teknik UNS

Kata Kunci :

*Adaptive
Mesh
Finite Element Method
Triangulation*

Abstrak :

Finite element method and its applications have emerged in engineering fields because primarily its ability to give approximation result that could use as data references for experiment and for real systems. In this decade the Finite Element Method is important lecture in technical especially in mechanical engineering education.

The purpose of this research is developing the adaptive triangulation mesh generation program for input domain of finite element analysis to solve general mechanical engineering problems. Research is conducted in some steps. These are literate study, developing the nodal distribution program, developing the triangulation program and developing the adaptive mesh program. Mesh is adaptive when element densities could be controlled to adjust the gradient variations from the result of finite elements analysis programs. Performance of adaptive mesh could define with minimum angle criterion. This research is conducted to proceed the previous research that have been investigating structured mesh (Development of Adaptive Structured Mesh Generation Programs as an Input Domain for Finite Element Analysis applied in Elasticity and Composite, 2006) The results of this research are nodal distribution, triangulation and adaptive mesh development program in simple manner. In general, outputs of the mesh generation program are nodal coordinates and connectivity. Researcher is developing running segment method to build the polygon triangulation. This method is comparable with Delaunay triangulation method. Nodal distribution is underlined in this research because of its importance to create adaptive mesh by h-method.

PENDAHULUAN

Persoalan dalam bidang rekayasa biasanya sangat kompleks dan memerlukan penyelesaian dengan komputer. Penggunaan metode elemen hingga (*finite element method*) untuk analisis bidang teknik mesin telah berkembang dengan pesat dan dapat diterima oleh dunia industri. Penerapan metode elemen hingga terdiri dari beberapa tahap yaitu tahap diskritisasi domain persoalan, pembentukan persamaan elemen - elemen, penyusunan dan penyelesaian persamaan sistem yang mencakup nilai batas serta penyajian atau interpretasi hasil komputasi elemen hingga.

Diskritisasi domain persoalan disebut juga pemodelan elemen hingga (*finite element modelling*), yaitu pemodelan domain dengan membagi domain menjadi subdomain atau elemen - elemen. Elemen ini lebih kecil dibandingkan dengan domain persoalan sebenarnya dan umumnya berbentuk segitiga atau segiempat untuk persoalan dua dimensi. Tujuan dari pembuatan mesh ini adalah memberikan kerangka kerja penyelesaian persoalan dengan perhitungan interpolasi. Pembuatan mesh ini nampaknya merupakan persoalan yang sederhana

jika dilihat sesaat, tetapi sebenarnya merupakan hal yang kompleks dan rumit. Kondisi inilah yang menyebabkan-batasan dan kendala yang signifikan dalam penyebarluasan dan penguasaan metode elemen hingga dalam bidang rekayasa.

Keluaran program pembangkitan mesh ini adalah data distribusi nodal yaitu koordinat nodal-nodal dan data konektivitas elemen - elemen untuk suatu mesh tertentu dari persoalan teknik mesin umum. Persoalan dapat meliputi elastisitas, mekanika bahan, perpindahan panas, aerodinamika dan lain - lain.

Penyelesaian persoalan teknik mesin umum antara lain elastisitas, mekanika bahan, perpatahan dan *fatigue*, aliran fluida/aerodinamika dan perpindahan panas telah berkembang dengan pesat baik secara eksperimen, teoritis dan secara pendekatan numerik. Pendekatan numerik dan simulasi komputer untuk saat ini berkembang dengan pesat karena tersedianya komputer dengan kemampuan memori besar dan kecepatan hitung yang sangat tinggi. Program analisis elemen hingga ini tidak dikembangkan dalam penelitian ini. Oleh karena itu selama penelitian ini dikerjakan dan

setelah penelitian ini selesai dilakukan, tim peneliti tetap melakukan kerjasama dengan pakar yang kompeten pada bidang penerapan tersebut di atas.

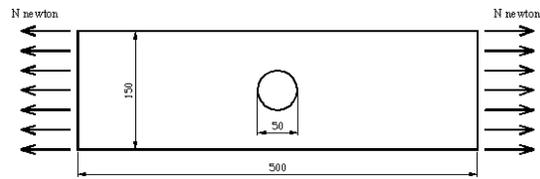
Penelitian ini memberikan keluaran yang dapat mendukung perkembangan ilmu perancangan teknik mesin. Selain itu juga memberikan dukungan penuh kepada penelitian eksperimen berupa data - data simulasi numerik bernilai tinggi yang digunakan untuk memprediksi hasil eksperimen.

DASAR TEORI

Program *adaptive mesh generation* menghasilkan domain masukan untuk program komputer yang menggunakan perhitungan dengan metode elemen hingga. Saat ini metode elemen hingga telah diterima dan digunakan secara luas di industri.

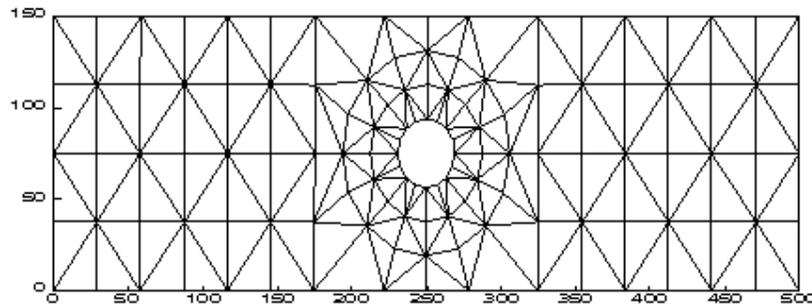
Metode Elemen Hingga : Tahapan Diskritisasi

Sebelum proposal ini diajukan, peneliti telah berusaha mengembangkan program pembangkit mesh terstruktur adaptif yang dapat memberikan hasil pendekatan yang lebih baik untuk program elemen hingga. Ilustrasi tahapan diskritisasi dalam penelitian sebelumnya ditunjukkan pada Gambar 1 sampai dengan Gambar 3.

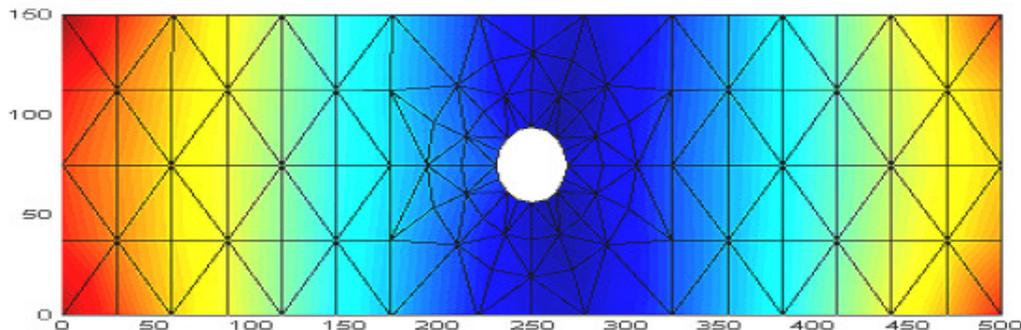


Gambar 1. Pelat berlubang dengan beban tarik N Newton.

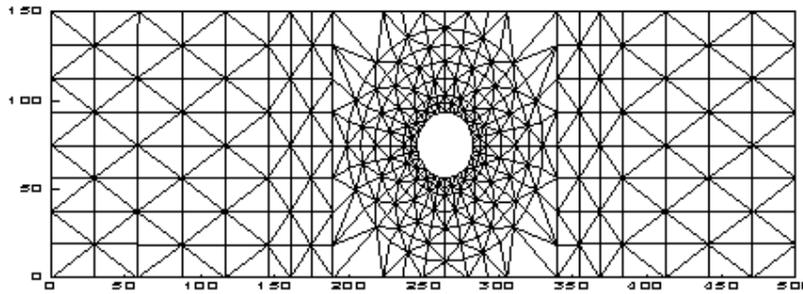
Persoalan elastisitas ditunjukkan pada Gambar 1 yaitu menentukan distribusi tegangan pada pelat berlubang tepat di tengah yang mengalami gaya tarik N Newton. Diskritisasi domain persoalan seperti pada Gambar 2. Selanjutnya Gambar 3 menunjukkan distribusi tegangan pada pelat tersebut yang diperoleh dari analisis elemen hingga. Nilai tegangan yang besar terjadi pada daerah diatas dan dibawah lubang lingkaran. Perubahan nilai tegangan yang terbesar terjadi pada daerah disekitar lubang lingkaran dan perubahan semakin rendah pada daerah ujung-ujung pelat. Dari penjelasan ini dapat ditunjukkan bahwa tahap diskritisasi yang dimaksudkan dalam metode elemen hingga adalah membuat mesh seperti pada Gambar 2 berdasarkan domain fisis pada Gambar 1.



Gambar 2. Diskritisasi pelat berlubang. Pelat dibagi menjadi elemen - elemen segitiga. Input untuk program elemen hingga.



Gambar 3. Distribusi tegangan pada pelat berlubang dengan beban tarik. Warna menyatakan *magnitude* tegangan.



Gambar 4. Contoh mesh terstruktur adaptif.

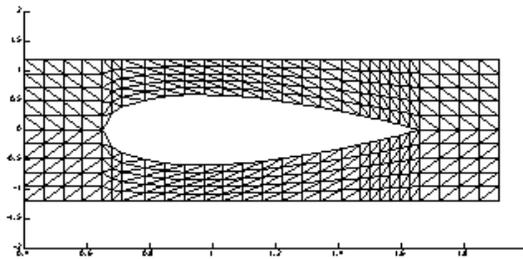
Mesh Adaptif

Mesh pada Gambar 3 adalah mesh terstruktur tetapi tidak adaptif. Elemen - elemen segitiga yang digunakan cenderung mempunyai ukuran yang sama. Batas dari lubang tidak halus sehingga dapat mempengaruhi ketelitian hasil perhitungannya. Batas lingkaran dalam persoalan ini dan batas kurva lengkung pada umumnya dapat didekati dengan lebih baik jika menggunakan elemen yang lebih kecil atau dengan menggunakan elemen kuadratik atau polinomial yang lebih tinggi. Contoh mesh adaptif terstruktur dapat dilihat pada Gambar 4.

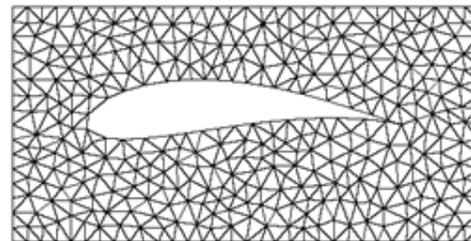
Metode-metode untuk membuat mesh yang adaptif yaitu metode *mesh movement*, metode *h-refinement* dan metode *p-refinement*. Tiap metode ini diterapkan pada persoalan yang tertentu. Roe (2002) menggunakan metode *mesh movement* untuk memperoleh simulasi penyelesaian aliran fluida eksternal pada airfoil. Huebner (1995) menunjukkan metode *h-refinement* untuk memperbaiki mesh awal yang digunakan pada persoalan elastisitas dan perpindahan panas. Studi tentang parameter kesalahan untuk mesh adaptif dengan metode *h-refinement* telah dikembangkan oleh Onate (1993). Penggunaan kriteria distribusi kesalahan yang sama (*equal distribution of specific error*) akan menyebabkan elemen yang semakin kecil dan jumlah elemen yang semakin banyak untuk bagian domain yang mempunyai perubahan nodal atau nilai gradien yang besar. Kriteria ini akan memberikan penyelesaian yang lebih akurat dan disarankan untuk tujuan praktis.

Mesh Tak Terstruktur pada Persoalan Teknik Mesin

Penelitian sebelumnya juga telah berhasil mengembangkan mesh terstruktur untuk airfoil ditunjukkan pada Gambar 5. *Airfoil* diperoleh dari persamaan profil permukaan airfoil NACA 0012. Gambar 6 menunjukkan mesh *airfoil* yang dihasilkan dari program pembangkit mesh otomatis dengan cara triangulasi Delaunay seperti pada Gambar 6.



Gambar 5. Mesh untuk analisis aerodinamika sekitar *airfoil* NACA 0012.

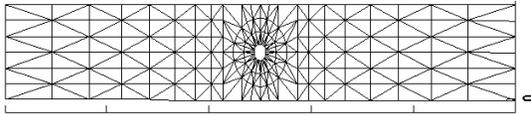


Gambar 6. Mesh triangulasi untuk analisis aerodinamika *airfoil*.

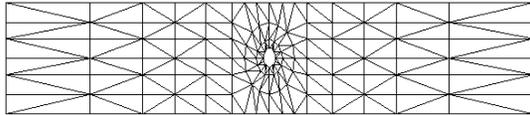
Untuk persoalan aerodinamika seperti ini, analisis elemen hingga menggunakan mesh tak terstruktur lebih disukai karena dapat mendekati bentuk permukaan batas yang kompleks lebih baik dibandingkan mesh terstruktur. Selain itu mesh dapat dihasilkan oleh program pembangkit mesh otomatis ini yaitu dengan menentukan batas - batas domain saja.

Contoh Penerapan Mesh Adaptif

Penelitian ini merupakan kelanjut-an dari penelitian yang membahas penerapan analisis elemen hingga pada komposit. Hidajat dan Ariawan (2006) telah berhasil memprediksi sifat kuat tarik spesimen komposit berlubang ditengah dengan pembebanan satu arah. Gambar 7 menunjukkan mesh untuk spesimen berlubang yang digunakan dalam penelitian Hidajat dan Ariawan (2006). Gambar 8 merupakan mesh baru yang akan ditentukan unjuk kerjanya dalam penelitian ini.



Gambar 7. Mesh dari penelitian Hidajat dan Ariawan (2006).



Gambar 8. Mesh adaptif.

Selanjutnya dari penelitian Hidajat dan Ariawan (2006) diperoleh bahwa mesh adaptif sebagai input program analisis elemen hingga telah menunjukkan hasil analisis hubungan tegangan terhadap pembebanan dan hubungan regangan terhadap pembebanan yang sama dengan eksperimen. Mesh adaptif diketahui juga memberikan hasil yang sama seperti ditunjukkan Pada Tabel 1. Persoalan menentukan hubungan regangan dan tegangan terhadap pembebanan pada komposit ini dapat dipandang sebagai persoalan yang bergantung pada kualitas mesh yang digunakan (*mesh dependent solution*, Huebner, 1996).

Tabel 1. Perbandingan hasil eksperimen dan analisis FE dengan menggunakan mesh adaptif.

P (Newton)	Eksperimen		Analisis FE			
			Mesh Gb. 14		Mesh Adaptif Gb. 15	
	Teg Tarik	Reg Tarik	Teg Tarik	Reg Tarik	Teg Tarik	Reg Tarik
6.53	44.61	0.015	23.50	0.015	22.80	0.010
7.81	53.36	0.018	28.00	0.018	27.60	0.015
9.93	67.84	0.023	35.90	0.021	36.50	0.021
12.06	82.39	0.027	43.20	0.024	43.80	0.022
14.19	96.95	0.032	51.10	0.029	53.20	0.027

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian telah menghasilkan program pembangkitan mesh sebagai masukan domain persoalan untuk analisis elemen hingga. Hasil penelitian berupa program komputer untuk mesh tak terstruktur.

Garis Besar Tahapan Penelitian

Terdapat tiga tahapan yang dilaksanakan yaitu tahapan studi pustaka, tahapan pembuatan mesh yang terdiri dari program distribusi nodal, program triangulasi, program pembangkitan mesh dan tahapan ketiga yaitu pembuatan program mesh adaptif. Selain tahapan studi pustaka, tahapan - tahapan dalam penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 9.

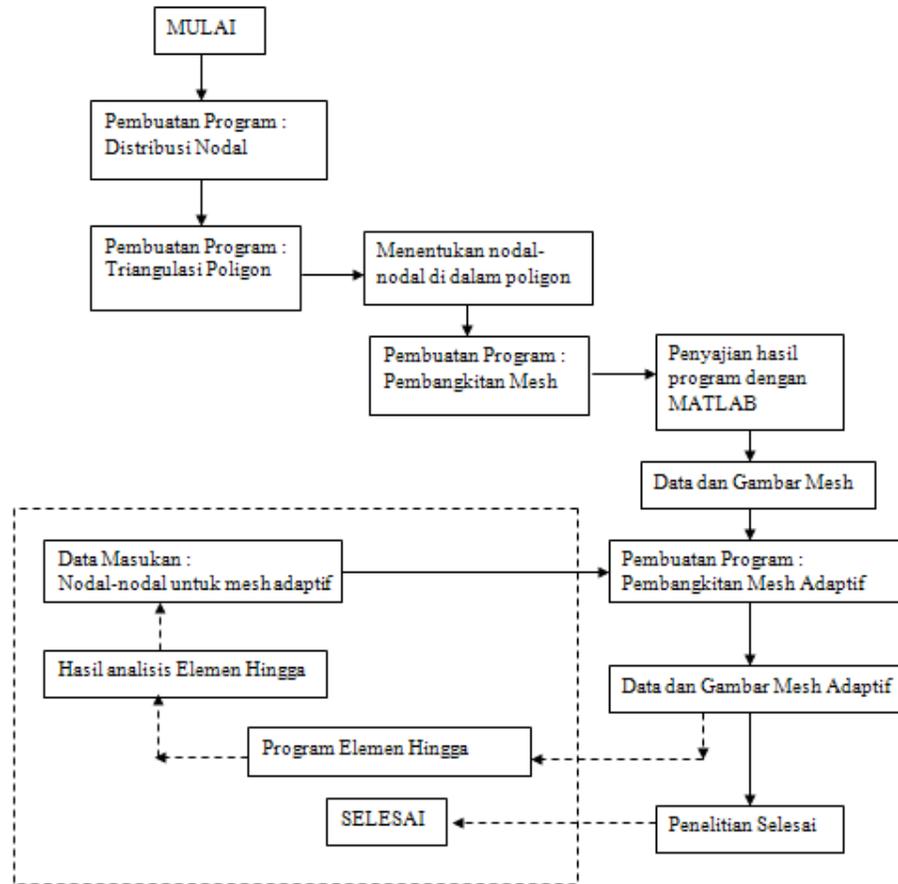
Program Distribusi Nodal

Tahapan pertama untuk membangkitkan mesh adalah dengan menentukan nodal - nodal yang terdistribusi didalam (atau diluar) suatu poligon. Poligon ini adalah bentuk fisis dua dimensi dari persoalan sebenarnya. Selain itu data yang berupa nodal adalah nodal yang menyatakan bagian terluar dari poligon. Nodal ini terutama adalah titik - titik sudut (vertex) poligon. Bentuk suatu poligon tidak hanya dinyatakan dengan titik - titik sudutnya saja tetapi bila dinyatakan dengan banyak nodal dalam garis (segmen) atau garis - garis dalam poligon maka bentuk poligon menjadi lebih tegas.

Penelitian ini menggunakan distribusi nodal yang teratur. Dengan cara ini dapat ditentukan nodal - nodal yang berada di tiap segiempat yang merupakan latar belakang dari bentuk poligon. Program '*convex hull*' disusun untuk menentukan nodal - nodal yang berada di sepanjang segmen - segmen garis poligon. Tidak seperti definisi dari *convex hull* yaitu poligon yang sisi - sisinya menghubungkan nodal - nodal terluar dari set nodal dalam bidang datar (M. De Berg, 2001, *Computational Geometry*), penelitian ini menetapkan bahwa *convex hull* adalah poligon yang akan didiskritkan. Data poligon berupa vertex - vertex seperti diterangkan di atas dan berupa nodal nodal yang berada di dalam segmen - segmen. Oleh karena itu bentuk poligon adalah poligon sederhana dan tertutup.

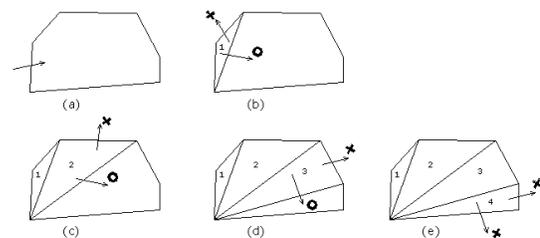
Program Triangulasi

Suatu bentuk poligon yang tertutup sederhana selalu dapat dinyatakan sebagai tersusun dari segitiga - segitiga (M. De Berg, 2001, *Computational Geometry*). Proses pembagian poligon menjadi segitiga - segitiga penyusunnya ini disebut triangulasi poligon (*polygon triangulation*). Metode triangulasi yang terkenal adalah triangulasi Delaunay. Triangulasi ini tidak saja dapat digunakan untuk poligon tetapi yang paling banyak digunakan untuk triangulasi nodal - nodal terdistribusi untuk membangkitkan mesh.



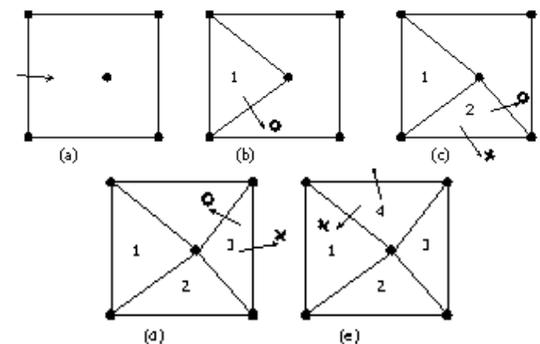
Gambar 9. Diagram alir pengembangan program pembangkitan mesh adaptif dengan triangulasi sebagai domain masukan analisis elemen hingga untuk persoalan teknik mesin.

Selanjutnya penelitian ini telah berhasil mengembangkan triangulasi dengan metode *running segment*. Ilustrasi singkat ditunjukkan sebagai berikut : Bentuk seperti pada Gambar 10 diperoleh data koordinat vertex – vertex (*vertices*) nya, selanjutnya dengan menentukan prioritas pada nodal yang berada di sebelah kanan garis maka dilakukanlah pembuatan segitiga. Penentuan titik ketiga dalam triangulasi ini menggunakan prioritas pada nodal yang terdekkan dengan segmen dari segitiga sebelumnya. Penjelasan metode ini dapat ditunjukkan pada Gambar 10 (a) sampai dengan Gambar 10.(e)

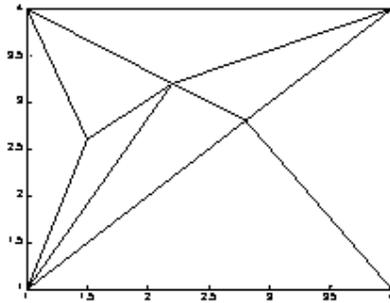


Gambar 10. Triangulasi Poligon.

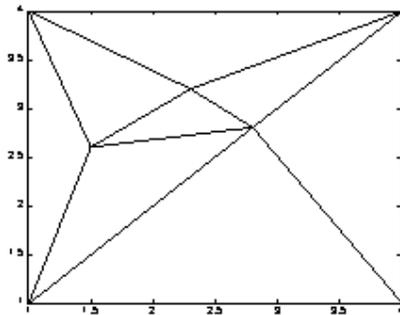
Triangulasi poligon dengan metode *running segmen* ini dapat digunakan untuk menangani nodal - nodal internal didalam segiempat. Contoh sederhana untuk satu nodal di dalam segiempat ditunjukkan pada Gambar 12. Hasil triangulasi Delaunay yang diterapkan pada distribusi nodal yang sama ditunjukkan pada Gambar 13.



Gambar 11. Segiempat dengan lima nodal, satu nodal interior.



Gambar 12. Hasil triangulasi.



Gambar 13. Hasil triangulasi Delaunay

Program Mesh Adaptif

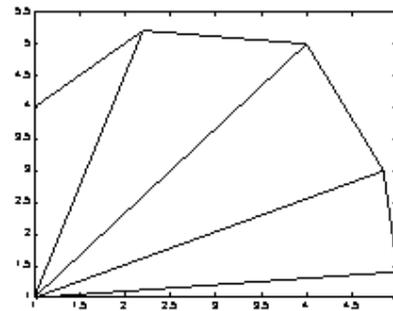
Tahapan pengembangan mesh adaptif berdasarkan data mesh sebelumnya. Data kontinuitas tiap elemen memberikan bentuk segitiga yang besar sudut - sudutnya adalah tertentu. Segitiga dapat berupa segitiga runcing (*needles*) atau segitiga *cap* (sudut maksimum mendekati 180°). Kriteria sudut minimum adalah besar sudut tidak boleh kurang dari 30° dan bahkan untuk algoritma yang canggih dapat menghasilkan sudut minimum 24°. Algoritma yang digunakan untuk mendapatkan kriteria ini antara lain *Chew's first and second Delaunay Refinement Algorithm* dan *Ruppert's Delaunay Refinement Algorithm* (Shewchuk, 1997). Algoritma ini sangat rumit terutama dalam struktur datanya. Oleh karena itu dalam penelitian ini masih menggunakan distribusi nodal yang diatur sedemikian agar diperoleh elemen segitiga yang 'akurat'.

HASIL DAN PEMBAHASAN

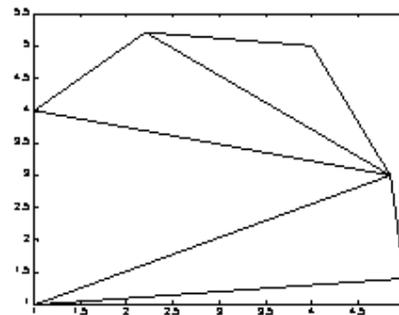
Penelitian ini telah berhasil mengembangkan program pembangkitan mesh adaptif dengan triangulasi sebagai domain masukan analisis elemen hingga. Program pembangkitan mesh ini tersusun dari 2 bagian spesifik yaitu program distribusi nodal dan program triangulasi. Penelitian ini menunjukkan bahwa mesh dapat disusun dengan melakukan triangulasi nodal - nodal yang terdistribusi dalam pligon. Input program distribusi nodal meliputi pembagian domain arah x (+ Δx) dan y (+ Δy) yang membentuk *background* dari poligon dan data poligon berupa vertex dan nodal -nodal yang berada pada tiap segmen poligon.

Pembahasan Program Triangulasi

Penelitian ini berhasil mengembangkan program triangulasi dengan menggunakan metode *running segment*. Metode ini dapat digunakan untuk triangulasi poligon dan untuk melakukan triangulasi nodal - nodal internal di dalam sebuah segiempat. Metode triangulasi yang lain adalah triangulasi Delaunay. Selanjutnya untuk distribusi nodal yang sama kemungkinan besar diperoleh bentuk mesh yang berbeda seperti ditunjukkan pada Gambar 14 dan Gambar 15. Penelitian ini juga menemukan bahwa metode *running segmen* ini berlaku dengan baik untuk poligon *convex* tetapi belum berhasil sepenuhnya untuk poligon bentuk *concave*. Selanjutnya data triangulasi ini digunakan untuk menentukan nodal - nodal yang berada di dalam poligon.



Gambar 14. Triangulasi dengan *running segment*.



Gambar 15. Triangulasi Delaunay.

Pembahasan Program Pembangkitan Mesh

Program pembangkitan mesh tersusun dari bagian triangulasi distribusi nodal dan program tampilan menggunakan perangkat lunak MATLAB. Program pembangkitan mesh memuat *subroutine* triangulasi yang setiap kali dieksekusi sebanyak *array* segiempat yang merupakan *background* dari poligon.

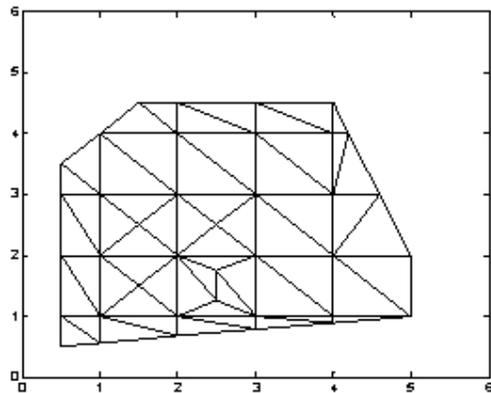
Gambar 16 adalah mesh yang diperoleh dari penelitian ini sedangkan Gambar 17 adalah mesh yang diperoleh dari triangulasi Delaunay. Selanjutnya dapat dilihat bahwa program pembangkitan mesh ini memberikan hasil yang sama dengan triangulasi Delaunay. Mesh yang

diperoleh dalam penelitian ini cenderung mempunyai elemen yang terstruktur dengan orientasi segitiga yang sama, sedangkan mesh triangulasi Delaunay cenderung merupakan mesh tak terstruktur yang nampak dari orientasi elemen segitiga.

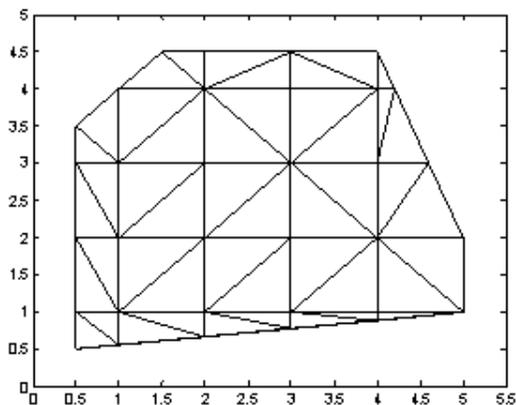
Pembahasan Program Pembangkitan Mesh Adaptif

Penelitian ini dapat menunjukkan bahwa mesh adaptif dapat diperoleh dari penyusunan kembali mesh sebelumnya. Mesh adaptif merupakan input untuk program analisis elemen hingga yang dapat memberikan hasil yang akurat sesuai dengan persoalannya. Penyelesaian persoalan elemen hingga memerlukan data diskritisasi domain fisisnya, sehingga bergantung pada kualitas mesh yang digunakan (*mesh dependent solution*, Huebner, 1996).

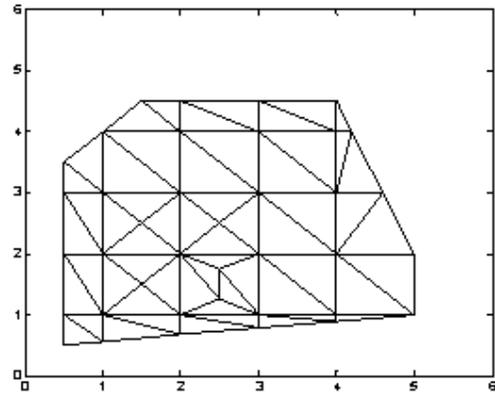
Pada penelitian ini mesh adaptif yang diperoleh dapat dibandingkan dengan mesh triangulasi Delaunay. Seperti sebelumnya diketahui bahwa triangulasi bergantung pada distribusi nodal sebagai data masukan. Gambar 18 dan 19 menunjukkan mesh yang diperoleh dari penelitian ini dan triangulas Delaunay.



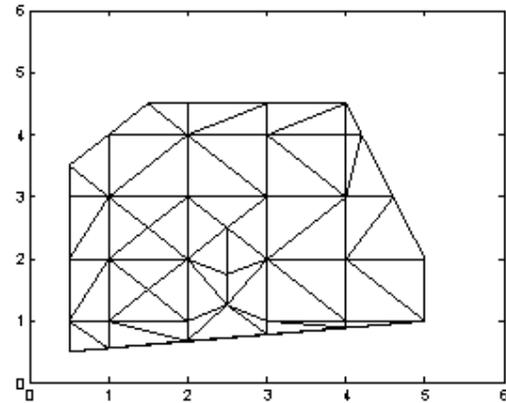
Gambar 16. Mesh dari penelitian.



Gambar 17. Mesh dengan triangulasi Delaunay.



Gambar 18. Mesh adaptif dari penelitian.



Gambar 19. Mesh adaptif dengan triangulasi Delaunay.

Program analisis elemen hingga tidak dibahas dalam penelitian ini. Kedudukan program tersebut adalah menerima masukan berupa data mesh, selanjutnya program akan melakukan suatu perhitungan untuk penyelesaian persoalan teknik tertentu. Hal ini lebih jelas jika kembali memeriksa Gambar 9 tentang diagram alir penelitian ini.

KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini dapat memberikan kesimpulan-kesimpulan berdasarkan hal - hal yang telah dilakukan yaitu :

1. Penelitian ini telah dapat menghasilkan program pembangkitan mesh triangulasi adaptif yang dapat digunakan sebagai domain masukan analisis elemen hingga.
2. Program pembangkitan mesh tersusun dari bagian utama yaitu program distribusi nodal dan program triangulasi. Program distribusi nodal menghasilkan masukan untuk program
3. Program pembangkitan mesh adaptif menggunakan h-method yaitu melakukan distribusi ulang pada data nodal. Hal ini dapat dilakukan karena metode adaptif ini

tidak sepenuhnya memerlukan hasil keluaran analisis elemen hingga.

4. Penelitian ini berhasil mengembangkan triangulasi dengan menggunakan metode *running segmen*. Metode ini dapat diterapkan dengan baik untuk *poligon convex* dan triangulasi nodal - nodal di dalam elemen segiempat.

Saran untuk penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Triangulasi dengan metode *running segmen* perlu dikembangkan lebih lanjut sehingga dapat lebih tangguh (*robust*), dapat melakukan triangulasi untuk bentuk *poligon concave* dan bentuk poligon dengan lubang.
2. Apabila saran yang pertama ini dapat dipenuhi maka selanjutnya perlu disusun program pembangkitan mesh yang terintegrasi antara program distribusi nodal dan triangulasi. Pada penelitian ini kedua program tersebut terpisah.
3. Perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk menentukan kriteria yang baik untuk mesh adaptif dengan tidak berdasarkan pada hasil program analisis elemen hingga.

DAFTAR PUSTAKA

- Akin, J.E., 2003, Finite Element Analysis with Error Estimation, *Ph.D Thesis*, Rice University Department of Mechanical Engineering and Material Science, Houston Texas USA.
- Carey, Graham F., 1997, *Computational Grids, Generation, Adaptation and Solution Strategies*, The University of Texas at Austin, Taylor and Francis, Texas USA.
- De Berg, Mark., M. Van Kreveld. M. Overmars, O. Schwarzkopf, 2000, *Computational Geometry Algorithms and Applications*, 2nd edition, Springer, Berlin.
- George, Paul-Louis, Houman Borouchaki, 1998, *Delaunay Triangulation and Meshing, Application to Finite Elements*, edition Hermes, 8 quai du Marche-Neuf, Paris.

Hidajat, R. Lulus Lambang G, *Pengembangan Program Pembangkitan Mesh Terstruktur Adaptif sebagai Domain Masukan Analisis Elemen Hingga untuk Persoalan Elastisitas dan Komposit*, PDM 2006, DIKTI.

Olate E, G Budega, 1993, "Mesh Optimality Criteria for Adaptive Finite Element Computations", *The Mathematics of Finite Element and Applications*, p.p 105 – 120.

Preparata, Franco. P, Michael Ian Shamos, 1985, "Computational Geometry an Introduction", *Texts and Monographs in Computer Science*, Springer Verlag, New York.

Shewchuk, Jonathan R, 1997, Delaunay Refinement Mesh Generation, *Thesis*, School of Computer Science, Computer Science Department, Carnegie Mellon University, Pittsburgh PA.